APRIL/MAY 2025

23UMA42 — ELEMENTS OF MATHEMATICAL ANALYSIS

Time : Three hours Maximum : 75 marks

SECTION A — ($10 \times 2 = 20$ marks)

Answer ALL questions.

1. Define equality of Sets.
   கணங்களின் சமத்துவத்தை வரையறு.



2. Define even function.
   இரட்டைப்படை சார்பை வரையறு.

3. Define sequence.
   தொடர்வரிசையை வரையறு.

4. Define Limit of a sequence.
   ஒரு தொடர்வரிசையின் எல்லையை வரையறு.

5. Define Cauchy sequence.
   காச்சி தொடர்வரிசையை வரையறு.

6. Define Limit superior
   மேல் நிலை எல்லையை வரையறு.

7. Define Series.

தொடரை வரையறு.

8. Define Alternating Series.

ஆடற்றொடரை வரையறு.

9. Define Limit of a function on a real line.

மெய்யெண் கோட்டில் மீது ஒரு சார்பின் எல்லையை வரையறு.

10. Write two examples of metric space.

மெட்ரிக் வெளிக்கு இரண்டு எடுத்துக்காட்டுகள் எழுதுக.

SECTION B — ($5 \times 5 = 25$ marks)

Answer ALL questions.

11. (a) Prove that set of all rational numbers is countable.

விகிதமுறு எண்களின் கணம் எண்ணிடத்தக்கது என நிறுவுக.

Or

(b) Prove that the set $[0,1] = \{x / 0 \leq x \leq 1\}$ is uncountable.

$[0,1] = \{x / 0 \leq x \leq 1\}$ என்ற கணம் எண்ணிடத்தக்கதல்ல என நிறுவுக.

20. Let $\langle M, p\rangle$ be a metric space, If $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a convergent sequence of points of M, then $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is Cauchy.

$\langle M, p\rangle$ ஒரு மெட்ரிக் வெளி என்க, M ன் புள்ளிகளின் மீது $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஒருங்கும் வரிசை தொடர்வரிசை எனில் $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஒரு காச்சியின் தொடர்வரிசை என நிறுவுக.



SECTION C — (3 × 10 = 30 marks)

Answer any THREE questions.

16. A non-decreasing sequence which is bounded above is convergent.

மேல் எல்லையுடைய குறைவுறா தொடர்வரிசை ஒருங்கும் என நிறுவுக.

17. If 'A' is any non empty subset of R that is bounded below, then 'A' has a greatest lower bound in R.

A என்பது R இன் வெற்றற்ற கீழ்வரம்பிறுட்பட்ட உட்கணம் எனில் R இல் A ஒரு மீப்பெரு கீழ்வரம்பை பெற்றிருக்கின்றது என்பதை நிறுவுக.

18. Prove that $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4} = \dfrac{3}{5}$.

$\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n^2 - 6n}{5n^2 + 4} = \dfrac{3}{5}$ என்பதை நிரூபி.

19. Prove that the series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)$ is divergent.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{n}\right)$ என்னும் தொடர் விரியும் என நிறுவுக.

Shanmuga Industries Arts & Science College T.V.Malai

12. (a) All subsequence of the convergent sequence of real numbers converge to same limit.

மெய்யெண்களின் ஒருங்கும் தொடர்வரிசையின் அனைத்து உட்தொடர்வரிசைகளும் ஒரே எல்லைக்கு ஒருங்கும் என நிரூபி.

Or

(b) If the sequence of real numbers $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent then $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is bounded.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை ஒருங்கும் எனில் $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ எல்லையுடையது என நிரூபி.

13. (a) If $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of real numbers if $C \in R$ and if $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L$ then $\lim\limits_{n \to \infty} C\, S_n = C\, L$.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை, $C \in R$ மற்றும் $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = L$ எனில் $\lim\limits_{n \to \infty} C\, S_n = C\, L$ என நிரூபி.

Or

(b) If the sequence of real numbers $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergence, then $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence.

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற மெய்யெண்களின் தொடர்வரிசை ஒருங்கும் எனில் $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஒரு காச்சியின் தொடர்வரிசை என நிறுவுக.

14. (a) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges absolutely then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ முழுமையாக ஒருங்கும் எனில் $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ என நிறுவுக.

Or

(b) If $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges series then $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ஒருங்கும் எனில் $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ என நிரூபி.



15. (a) If 'f' is a monotone function on the open interval (a,b) and if $c \in (a,b)$ then $\lim_{x\to c^+} f(x)$ and $\lim_{x\to c^-} f(x)$ both exist.

f என்பது திறந்த இடைவெளி (a,b) இல் ஒரு ஓரியல்புச் சார்பு மற்றும் $c \in (a,b)$ எனில் $\lim_{x\to c^+} f(x)$ மற்றும் $\lim_{x\to c^-} f(x)$ இரண்டும் இருக்கும் என நிரூபி.

Or

(b) If real valued functions 'f' and 'g' are continuous at $a \in R^1$ then so are $f+g, f-g$, and fg. If $g(a) \neq 0$ then f/g is also continuous at 'a'.

$a \in R^1$ இல் 'f' மற்றும் 'g' என்னும் மெய் மதிப்பு சார்புகள் தொடர்ச்சியானது எனில் $f+g, f-g$, மற்றும் fg ஆகியவை தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக. மேலும், $g(a) \neq 0$ எனில், 'a' இல் f/g தொடர்ச்சியானது என நிறுவுக.